ECOLE NATIONALE DES INGENIEURS DES TRAVAUX RURAUX ET DES TECHNIQUES SANITAIRES
STRASBOURG

# CONCOURS D'ENTRÉE 1988
## PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

**OPTION BIOLOGIE-MATHÉMATIQUES** **DURÉE : 3 HEURES**

Pour tout entier n positif ou nul, on note $g_n$ la fonction polynomiale définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par $g_n(x) = (x^2 - 1)^n$ et $P_n$ la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} g_n^{(n)}(x)$ où $g_n^{(n)}$ désigne la dérivée n-ième de la fonction $g_n$. On rappelle que la dérivée d'ordre 0 d'une fonction f est f elle-même.

### I

1. Montrer que $P_n$ est une fonction polynomiale dont on calculera le degré. Préciser le degré des monômes de $P_n$ et leurs coefficients. Calculer $P_n(0)$.

2. Tracer le graphe de $P_0$ , $P_1$ , $P_2$ , $P_3$ .

3. a. Utiliser la formule de Leibniz donnant la dérivée n-ième du produit de deux fonctions pour trouver une autre expression de $P_n(x)$. Calculer $P_n(1)$ et $P_n(-1)$.

   b. Calculer la somme $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left(C_n^k\right)^2$ $\left(C_n^k \text{ coefficient du binôme} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\right)$

   c. Montrer que la somme $\sum_{k=0}^{n} \left(C_n^k\right)^2 x^k$ s'exprime simplement au moyen de $P_n\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$, pour x réel différent de 1.

### II

1. Montrer que si f est une fonction numérique de classe $C^n$ sur $[-1, +1]$ (c'est-à-dire n fois continuement dérivable sur $[-1, +1]$ ), on a :

$$\int_{-1}^{+1} f(t)P_n(t)dt = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\int_{-1}^{+1} f^{(n)}(t)(t^2 - 1)^n dt .$$

2. Montrer que, n et m étant deux entiers positifs ou nuls distincts,
$\int_{-1}^{+1} P_n(t)P_m(t)dt = 0.$

3. Calculer le nombre $\int_{-1}^{+1} P_n^2(t)dt$.

4. Soit $(Q_n)$, $n \in \mathbb{N}$, une suite de polynômes à coefficients réels tels que :

   $H_1$) $Q_n$ est de degré n et le coefficient de $x^n$ dans $Q_n$ est positif.

   $H_2$) $\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2$, $n \neq m$, $\int_{-1}^{+1} Q_n(t)Q_m(t)dt = 0$

   $H_3$) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_{-1}^{+1} Q_n^2(x)dx = \frac{2}{2n+1}$ .

   Montrer que nécessairement, $\forall n \in \mathbb{N}$, $Q_n = P_n$ .

5. Soit $(R_n)$, $n \in \mathbb{N}$, une suite de polynômes à coefficients réels tels que :

   $H'_1$) $R_n$ est de degré n

   $H'_2$) $\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2$, $n \neq m$, $\int_{-1}^{+1} R_n(t)R_m(t)dt = 0$.

   Que peut-on dire de $R_n$ ?

### III

On note $h_n$ la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par $h_n(x) = (1-x^2)P'_n(x)$, où $P'_n$ désigne la dérivée de la fonction $P_n$ .

1. Calculer l'intégrale $\int_{-1}^{+1} h'_n(x)x^k dx$ pour k = 0, 1, ..., n-1.

2. Démontrer qu'il existe une constante réelle $c_n$ dépendante de l'entier n ($n \in \mathbb{N}$) telle que $h'_n = c_n P_n$ (utiliser II.5.).

3. Trouver une équation différentielle linéaire homogène du deuxième ordre vérifiée par $P_n$.

---

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes




Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail